

III-ТАРАУ. ТҮТАС ОРТА ДЕФОРМАЦИЯСЫНЫҢ ТЕОРИЯСЫ

3.1. Деформация тензоры

Тұтас орта қозғалысының бірнеше айрықша ерекшеліктері бар. Абсолют қатты денеде сол денені құрайтын бөлшектердің салыстырмалы қозғалысы болмайды. Тұтас ортада бөлшектердің **салыстырмалы қозғалысы** болғандықтан, бөлшектердің ара қашықтығы өзгеріп тұрады. Бұл құбылыс **ортаның деформациялануы** делінеді. Тұтас орта қозғалысында оның деформациялануының маңызды орны бар. Сонымен бірге деформацияланған дененің жеке бөліктерінің арасында өзара әсер күші болады.

Қозғалмайтын **тік бұрышты декарт координаталар жүйесіне** (x^1, x^2, x^3) қатысты дененің қозғалысын қарастырайық. Дененің әрбір M нүктесімен ілеспелі координаталар жүйесін (ξ^1, ξ^2, ξ^3) байланыстырайық. **Ілеспелі жүйе** денемен бірге қозғалады және ілеспелі жүйенің t_0 және t уақыт мезгіліндегі базис векторы әртүрлі болады. t_0

мезгіліндегі базис вектордың мәнін $\overset{o}{\vec{e}}_i$, ал t мезгіліндегісін $\overset{\wedge}{\vec{e}}_i$ белгілейік. Ілеспелі жүйенің базис векторлары уақыт бойынша өзгеріп отырады және дененің әрбір M нүктесінің орнына байланысты болады. Егер жүйе (ξ^1, ξ^2, ξ^3) ортаның ішіне қатырылған болса, ал ортаның өзі абсолют қатты дене сияқты қозғалса, онда ілгерілемелі орын ауыстыру және айналу арқылы $\overset{o}{\vec{e}}_i$ триэдрден $\overset{\wedge}{\vec{e}}_i$ триэдрге ауысуға болады

$$\left| \overset{o}{\vec{e}}_i \right| = \left| \overset{\wedge}{\vec{e}}_i \right|, \quad \angle(\overset{o}{\vec{e}}_i, \overset{o}{\vec{e}}_j) = \angle(\overset{\wedge}{\vec{e}}_i, \overset{\wedge}{\vec{e}}_j) \quad \text{немесе} \quad \overset{o}{\vec{e}}_i \overset{o}{\vec{e}}_j = \overset{\wedge}{\vec{e}}_i \overset{\wedge}{\vec{e}}_j.$$

Деформацияланатын дене қозғалысының жағдайында іс күрделене түседі. Деформацияланатын дене қозғалғанда оның M

және M' нүктелерінің ара қашықтығы өзгереді. Ілеспелі координаталар жүйесінің **координаттық сызықтары**

деформацияланады және $\hat{\vec{\varepsilon}}_i$ **базис векторларының** шамалары мен олардың арасындағы бұрыштар уақытқа байланысты өзгеріп отырады.

Қозғалыс кезінде тұтас орта нүктелерінің ара қашықтығының өзгеруі өте маңызды. Сонымен қатар **бөлшектердің арасындағы өзара әсер күші** олардың ара қашықтығының өзгеруіне тәуелді болады.

Деформацияланатын дененің кез келген екі орнын, атап айтқанда кез келген t және t' уақыт мезетіндегі оның M және M' нүктелерін қарастырайық.

t' мезгіліндегі M нүктесінің **базис векторларын** $\vec{\varepsilon}'_i$, ал t мезетіндегі мәндерін $\hat{\vec{\varepsilon}}_i$ деп белгілейік. Ілеспелі координаталар жүйесінде мынаны аламыз

$$d\vec{r} = d\xi^1 \hat{\vec{\varepsilon}}_1 + d\xi^2 \hat{\vec{\varepsilon}}_2 + d\xi^3 \hat{\vec{\varepsilon}}_3 = d\xi^i \hat{\vec{\varepsilon}}_i,$$

және

$$d\vec{r}^1 = d\xi^1 \vec{\varepsilon}'_1 + d\xi^2 \vec{\varepsilon}'_2 + d\xi^3 \vec{\varepsilon}'_3 = d\xi^i \vec{\varepsilon}'_i.$$

M нүктесінен шығатын түзудің кез келген шексіз аз кесіндісі тұтас ортаның қозғалыс процесінде M нүктесінен шыққан сол түзудің кішкентай кесіндісіне өтетінін көрсетейік.

Ара қашықтықтың өзгеру характеристикасын қарастыру үшін t және t' уақыт мезгіліндегі ілеспелі координаталар жүйесіне метрикалық тензорларды енгізу қажет t мезгілінде

$$|d\vec{r}| = ds, \quad ds^2 = g_{ij} d\xi^i d\xi^j, \quad g_{ij} = \hat{\vec{\varepsilon}}_i \hat{\vec{\varepsilon}}_j, \quad (3.1)$$

t' мезгілінде

$$|d\vec{r}'| = ds', \quad ds'^2 = g'_{ij} d\xi^i d\xi^j, \quad g'_{ij} = \vec{\Theta}'_i \vec{\Theta}'_j \quad (3.2)$$

болсын. Ерекше көңіл аударатын мәселе t және t' мезгілінде M және M' нүктелерінің координаталары, сәйкес координаталар жүйесінде бірдей, ал метрикалық тензорлардың компоненттері $\hat{g}_{ij}$ және g'_{ij} әртүрлі болады.

Салыстырмалы ұзару коэффициентін енгізейік

$$\ell = \frac{ds - ds'}{ds'} = \frac{ds}{ds'} - 1, \quad (3.3)$$

мұндағы ds және ds' доғалары тиісті уақыт мезгілінде ортаның сол баяғы жеке бөлшектері арқылы өтеді. ℓ коэффициенті M нүктесіне және есептелетін ds элементінің бағытына тәуелді, ал $d\vec{r}$ -дің ұзындығына тәуелсіз. Егер ℓ деформацияланатын ортаның әрбір нүктесінде және әрбір бағытта шексіз аз болса, онда **деформация шексіз аз** делінеді. Егер ℓ шектеулі мәнге ие болса, онда **деформация да шектеулі**. Анықтама бойынша, абсолют қатты денеде ℓ нольге тең.

Тұтас ортаның кез келген екі жағдайын қарастырғанда $\hat{g}_{ij}$, g'_{ij} мәндері мен $d\vec{r}$ -дің бағыты белгілі болса, онда **салыстырмалы ұзару коэффициентін** ℓ -ді енгізу арқылы кез келген $d\vec{r}$ үшін ℓ -ді есептеп шығаруға болады.

Әрбір бөлшектің маңындағы ортаның деформациясы екінші рангілі тензордың көмегімен толық сипатталады

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\hat{g}_{ij} - g'_{ij} \right). \quad (3.4)$$

Ортаның деформациясы бөлшектердің арасындағы қашықтықтың өзгерісіне байланысты болғандықтан, деформацияның шамасы былай табылады

$$ds^2 - ds'^2 = 2\varepsilon_{ij} d\xi^i d\xi^j. \quad (3.5)$$

(3.5) теңдігінің сол жағында $ds^2 - ds'^2$ шамасы, ал оң жағында – екінші рангілі тензордың $2d\xi^i d\xi^j$ **деформация тензорына** ε_{ij} көбейтіндісі келтірілген.

Деформация тензорының компоненттері үшін (3.4) формуласының мағынасы: деформацияның өзі ілеспелі координаталар жүйесіндегі метрикалық тензор компоненттерінің өзгеруімен байланысты.

Деформацияланатын денелерде пайда болатын деформация тензорлары негізгі характеристикалар болып табылады және олардың компоненттері тұтас орта қозғалысын сипаттайтын негізгі теңдеулерге енеді.

(3.4) теңдеуінде көрсетілгендей бізге қажет t мезгіліндегі деформация шамасы тек қана қарастырылып отырған уақыттағы дененің күйіне ғана емес, бұл деформацияның алғашқы күйіне де байланысты.

t уақыт мезгіліндегі ортаның күйі берілген болса, $t' = t_0$ уақыт мезгіліндегі күйді бастапқы күйі деп есептеуге болады. Бұл бастапқы күйдің болуы нақты жағдайда міндетті емес. Егерде ортаның нақты бастапқы күйі белгісіз болса, онда бастапқы күй ретінде ойша енгізілген ешқандай күш әсер етпейтін қарастырылып отырған дененің күйін алуға болады.

Ойша енгізілген күйдің метрикасын $\overset{0}{g}_{ij}$, ал ілеспелі жүйенің бастапқы күйіндегі базис векторын $\overset{0}{\vec{e}}_i$ арқылы белгілейік. Осындай жолмен енгізілген метрика **евклидтік емес метрика** болуы мүмкін. Тұтас ортаның реал қозғалысы евклидтік кеңістікте өтеді сондықтан, жалпы жағдайда ортаның ойша енгізілген бастапқы күйінен қазіргі күйге шын мәнінде ауыспауы мүмкін. Идеал **ойша алынған** «бастапқы күйді» метриканың өзгерісін бағалауға және деформация тензорын енгізуге пайдалануға болады.

Сонымен, физикалық түсінік бойынша **тұтас орта күйі** ретінде ойша енгізілген **бастапқы күй** іске асырылады немесе шын мәнінде кейбір қозғалыстың көмегімен бастапқы күйді,

тырнақшасыз бастапқы күй ретінде анықтауға болады. Егер ойша енгізілген бастапқы күйді, сол кеңістікте дененің үздіксіз қозғалысынан алуға болмаса, онда оны, тырнақшаның ішіне «бастапқы күй» деп қоямыз.

Жалпы жағдайда $\overset{0}{g}_{ij}$ компоненттері ξ^1, ξ^2, ξ^3 координаталарына және t уақытқа тәуелді. Егер ойша алынған «бастапқы күй» белгіленген болса, онда $\overset{0}{g}_{ij}$ тек ξ^1, ξ^2, ξ^3 координаталарына ғана тәуелді болады.

3.2. Деформация тензоры компоненттерінің геометриялық мағынасы

Деформация тензорының ковариантты компоненттерінің геометриялық мағынасын анықтайық. Метрикалық тензордың компоненттерін төмендегідей түрде жазайық

$$g_{ij} = \hat{\vec{\Xi}}_i \cdot \hat{\vec{\Xi}}_j = \left| \hat{\vec{\Xi}}_i \right| \cdot \left| \hat{\vec{\Xi}}_j \right| \cos \psi_{ij}, \quad (3.6)$$

$\hat{\vec{\Xi}}_i$ және $\hat{\vec{\Xi}}_j$ векторларының арасындағы бастапқы бұрыш ψ_{ij} , ал бастапқы метрикалық тензордың компоненттерін былай деп белгілейік

$$\overset{o}{g}_{ij} = \overset{o}{\vec{\Xi}}_i \cdot \overset{o}{\vec{\Xi}}_j = \left| \overset{o}{\vec{\Xi}}_j \right| \cdot \left| \overset{o}{\vec{\Xi}}_i \right| \cos \overset{o}{\psi}_{ij}. \quad (3.7)$$

Енді мынадай байланысты қарастырайық

$$\frac{\left| \hat{\vec{\Xi}}_i \right|}{\left| \overset{o}{\vec{\Xi}}_i \right|} = \frac{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^i} \right|}{\left| \frac{\partial \vec{r}_o}{\partial \xi^i} \right|} = \frac{\left| d\vec{r}_i \right|}{\left| d\vec{r}_{oi} \right|} = \frac{ds_i}{ds_{oi}} = \ell_i + 1,$$

бұдан:

$$\left| \hat{\tilde{\mathbf{e}}}_i \right| = \left| \tilde{\mathbf{e}}_i^o \right| (1 + \ell_i), \quad \left| \hat{\tilde{\mathbf{e}}}_j \right| = \left| \tilde{\mathbf{e}}_j^o \right| (1 + \ell_j). \quad (3.8)$$

Мұндағы $d\mathbf{s}_i$ және $d\mathbf{s}_{oi}$ – координаттық ξ^i сызықтың доғаларының элементтері, ал ξ^i -ге байланысты салыстырмалы ұзарудың коэффициенттері $-\ell_i$. Онда (3.8) ескеріп, төмендегі өрнекті аламыз

$$\begin{aligned} \hat{g}_{ij} &= \left| \tilde{\mathbf{e}}_i^o \right| \cdot \left| \tilde{\mathbf{e}}_j^o \right| (1 + \ell_i)(1 + \ell_j) \cos \psi_{ij}, \\ g_{ij}^o &= \left| \tilde{\mathbf{e}}_i^o \right| \cdot \left| \tilde{\mathbf{e}}_j^o \right| \cos \psi_{ij} \end{aligned}$$

t' мезгіліндегі тұтас ортаның күйіне бастапқы нақты күйді немесе «бастапқы күйді» g_{ij}^o қабылдап келесі формулаға келеміз

$$2\varepsilon_{ij} = \left[(1 + \ell_i)(1 + \ell_j) \cos \psi_{ij} - \cos \psi_{ij}^o \right] \left| \tilde{\mathbf{e}}_i^o \right| \cdot \left| \tilde{\mathbf{e}}_j^o \right|, \quad (3.9)$$

ол ε_{ij} -дің геометриялық мағынасын түсіндіруге қолайлы.

Алдымен ε_{ij} мәндерінің индекстері бірдей болғандағы геометриялық мағынасын қарастырайық. (3.9) формуласынан

$$2\varepsilon_{ii} = \left[(1 + \ell_i)^2 - 1 \right] g_{ii}^o,$$

шығады. Одан

$$\ell_i = \sqrt{1 + \frac{2\varepsilon_{ii}}{g_{ii}^o}} - 1. \quad (3.10)$$

Егер деформация аз болса, онда ε_{ii} - де аз. Сол себепті (3.10)-дағы түбірді қатарға жіктеп мынаны табамыз

$$\ell_i = \frac{\varepsilon_{ii}}{g_{ii}}.$$

Сонымен қатар, егер ілеспелі жүйенің «бастапқы күйі» декарт координаталар жүйесінде алынса $g_{ii}^0 = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)^2 = 1$, онда

$$\ell_i = \varepsilon_{ii}, \quad (3.11)$$

яғни индекстері бірдей деформация тензорының ковариантты компоненттері шексіз аз деформация кезінде бастапқы күйдің декарт координаталар осі бойымен бағытталған салыстырмалы ұзару коэффициенттеріне дәл келеді.

Өртүрлі индексті ($i \neq j$), ε_{ij} компоненттерінің геометриялық мағынасы туралы сұраққа оралайық. Ыңғайлы болу үшін «бастапқы күйде» берілген нүктеде өзара ортогональ координаталар жүйесін таңдап алайық, яғни

$$\psi_{ij}^0 = 90^\circ, \quad \left(\cos \psi_{ij}^0 = 0 \right)$$

ал деформацияланғаннан кейін

$$\psi_{ij} = 90^\circ - \chi_{ij}, \quad \left(\cos \psi_{ij} = \sin \chi_{ij} \right)$$

(3.8) теңдіктерін мына түрде жазайық

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_i} \right| = \frac{|\hat{\tilde{x}}_i|}{1 + \ell_i}, \quad \left| \frac{\partial}{\partial x_j} \right| = \frac{|\hat{\tilde{x}}_j|}{1 + \ell_j}$$

енді (3.4) формуласын (3.6) және (3.7) ескеріп, келесі түрге келтірейік

$$2\varepsilon_{ij} = \overset{\circ}{g}_{ij} - \hat{g}_{ij} = \left| \overset{\wedge}{\vec{\varepsilon}}_i \right| \left| \overset{\wedge}{\vec{\varepsilon}}_j \right| \cos \psi_{ij} - \frac{\left| \overset{\wedge}{\vec{\varepsilon}}_i \right| \left| \overset{\wedge}{\vec{\varepsilon}}_j \right|}{(1 + \ell_i)(1 + \ell_j)} \cos \overset{\circ}{\psi}_{ij}$$

$\cos \overset{\circ}{\psi}_{ij} = 0$ болғандықтан

$$2\varepsilon_{ij} = \left| \overset{\wedge}{\vec{\varepsilon}}_i \right| \left| \overset{\wedge}{\vec{\varepsilon}}_j \right| \cos \psi_{ij}.$$

Келесі теңдіктерді ескеріп

$$\psi_{ij} = 90^\circ - \chi_{ij}, \quad \cos \psi_{ij} = \sin \chi_{ij},$$

төмендегі формулаларға келеміз

$$2\varepsilon_{ij} = \left| \overset{\wedge}{\vec{\varepsilon}}_i \right| \cdot \left| \overset{\wedge}{\vec{\varepsilon}}_j \right| \sin \chi_{ij},$$

немесе

(3.12)

$$\sin \chi_{ij} = \frac{2\varepsilon_{ij}}{\sqrt{\hat{g}_{ii}} \sqrt{\hat{g}_{jj}}}.$$

Бұдан шығатын қорытынды, жалпы жағдайда бұрын «бастапқы күйдегі» координаталардың бұрыштары тік бұрыш болса, деформациядан кейін олар тік бұрыш болмайды және **эртүрлі (і≠j) индексті ε_{ij} ковариантты компоненттер алғашқыдағы тік бұрышты координаталардың өзгеруін сипаттайды.** Егер деформация шексіз аз болса және координаталар жүйесі «бастапқы күйде» декарт жүйесінде болса, онда

$$\overset{\circ}{g}_{ii} = 1, \quad \hat{g}_{ii} = 1 + 0(\delta),$$

мұндағы δ - шексіз аз шама, сондықтан

$$\sin \chi_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$$

немесе деформация аз болғандықтан

$$\chi_{ij} = 2\varepsilon_{ij}. \quad (3.13)$$

3.3. Деформация тензорын қолдану туралы

Ескерте кететін жәйт, деформация тензоры қатты дене деформациясының физикалық характеристикасы болып табылады, өйткені дененің әртүрлі бөліктерінің арасындағы өзара әсер күші, осы бөлшектердің өзара орын ауыстыруымен анықталады.

Сұйық және газ тәрізді денелерде өзара әсер күші орын ауыстырудың өзімен емес, олардың жылдамдықтарымен анықталады, сондықтан сұйықтар мен газдар механикасында деформация тензорының орнына деформация жылдамдықтарының тензоры қарастырылады.

3.3.1. Деформация тензорының компоненттерін қозғалыс заңы бойынша есептеу

Тұтас орта қозғалысының заңы берілсін

$$\mathbf{x}^i = \mathbf{x}^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t), \quad \xi^i = \xi^i(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3, t) \quad (3.14)$$

$$\mathbf{x}_0^i = \mathbf{x}^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t_0), \quad \xi^i = \xi^i(\mathbf{x}_0^1, \mathbf{x}_0^2, \mathbf{x}_0^3, t_0) \quad (3.15)$$

және бақылаушы кеңістігінің $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3$ метрикасы g_{ij} белгілі болсын. Мұндағы t уақыт ілеспелі жүйеден бақылаушының жүйесіне координаталарды түрлендіретін параметр ретінде қарастырылады. Егер бастапқы күй ортаның t_0 мезгіліндегі жағдайына сәйкес келсе, онда бақылаушы жүйесінің координаталарынан бастапқы күй үшін Лагранж жүйесіне көшуі (3.15) формуласымен анықталады. Деформация тензорының

ковариантты компоненттері ілеспелі координаталар жүйесінде (3.4) теңдігімен анықталады

$$\varepsilon_{ij}^{\wedge} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{g}_{ij}^{\wedge} - \mathbf{g}_{ij}^{\circ} \right),$$

мұндағы $\mathbf{g}_{ij}^{\wedge}$ - ілеспелі жүйенің анық берілген (актуальді) кеңістігінің метрикасы.

$$\mathbf{g}_{ij}^{\wedge} d\xi^i d\xi^j = g_{pq} dx^p dx^q, \quad dx^k = \frac{\partial x^k}{\partial \xi^e} d\xi^e,$$

болса, онда

$$\mathbf{g}_{ij}^{\wedge} = g_{pq} \frac{\partial x^p}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial x^q}{\partial \xi^j}$$

сондықтан, ілеспелі координаталар жүйесінде

$$\varepsilon_{ij}^{\wedge} = \frac{1}{2} \left(g_{pq} \frac{\partial x^p}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^q}{\partial \xi^j} - \mathbf{g}_{ij}^{\circ} \right),$$

мұндағы $\partial x^p / \partial \xi^i$ туындысы (3.14) формуласынан анықталады.

Айта кететін нәрсе, «бастапқы күй» кеңістігінің метрикасы $\mathbf{g}_{ij}^{\circ}$ туралы жалпы жағдайда ештеңе айтуға болмайды, себебі ол

әр түрлі физикалық ұғымға байланысты енгізіледі. Бірақ, $\mathbf{g}_{ij}^{\circ}$ компоненттерін «бастапқы күйдегі» ξ^i жүйесін тандау арқылы өзгертуге болады.

Егер бақылаушы жүйесінен бастапқы күйге көшу анықталған болса (3.15), онда Лагранж жүйесіндегі бастапқы күй үшін мынаны аламыз

$$\varepsilon_{ij}^{\circ} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{g}_{ij}^{\wedge} - g_{pq} \frac{\partial x_o^p}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial x_o^q}{\partial \xi^j} \right), \quad (3.16)$$

мұндағы $\partial x_o^m / \partial \xi^n$ (3.15) арқылы анықталады.

3.3.2. Орын ауыстыру векторының компоненттері арқылы деформация тензорын өрнектеу

Евклид метрикасында нақты орындалатын бастапқы $\overset{o}{g}_{ij}$, күйден $\hat{g}_{ij}$ күйіне ауысуды қарастырайық. Бұл жағдайда орын ауыстыру векторын $\vec{W}$ енгізуге болады, сонда $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{W}$. Мұндағы $\vec{r}_0, \vec{r}$ - бастапқы t_0 және берілген t уақыт мезетіне сәйкес, тұтас ортаның бір ғана M нүктесінің x^1, x^2, x^3 -ке қатысты санақ жүйесінің радиус-векторлары. Сонда төмендегі өрнекті алу қиын емес

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial \xi^i} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^i} - \frac{\partial \vec{r}_0}{\partial \xi^i} = \overset{\wedge}{\Xi}_i - \overset{o}{\Xi}_i$$

$$\text{бұдан } \overset{\wedge}{\Xi}_i = \overset{o}{\Xi}_i + \frac{\partial \vec{W}}{\partial \xi^i} \quad \text{немесе} \quad \overset{o}{\Xi}_i = \overset{\wedge}{\Xi}_i - \frac{\partial \vec{W}}{\partial \xi^i},$$

сондықтан

$$\hat{g}_{ij} = \overset{\wedge}{\Xi}_i \overset{\wedge}{\Xi}_j = \overset{o}{\Xi}_i \overset{o}{\Xi}_j + \overset{o}{\Xi}_i \frac{\partial \vec{W}}{\partial \xi^j} + \overset{o}{\Xi}_j \frac{\partial \vec{W}}{\partial \xi^i} + \frac{\partial \vec{W}}{\partial \xi^i} \frac{\partial \vec{W}}{\partial \xi^j}$$

ал

$$\overset{o}{g}_{ij} = \overset{o}{\Xi}_i \overset{o}{\Xi}_j = \overset{\wedge}{\Xi}_i \overset{\wedge}{\Xi}_j + \overset{\wedge}{\Xi}_i \frac{\partial \vec{W}}{\partial \xi^j} + \overset{\wedge}{\Xi}_j \frac{\partial \vec{W}}{\partial \xi^i} + \frac{\partial \vec{W}}{\partial \xi^i} \frac{\partial \vec{W}}{\partial \xi^j}$$

сол себепті деформация тензоры былай өрнектеледі

$$\begin{aligned} \overset{\wedge}{\varepsilon}_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\hat{g}_{ij} - \overset{o}{g}_{ij} \right) = \frac{1}{2} \left[\overset{o}{\Xi}_i \frac{\partial \vec{W}}{\partial \xi^j} + \overset{o}{\Xi}_j \frac{\partial \vec{W}}{\partial \xi^i} + \frac{\partial \vec{W}}{\partial \xi^i} \frac{\partial \vec{W}}{\partial \xi^j} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\overset{\wedge}{\Xi}_j \frac{\partial \vec{W}}{\partial \xi^i} + \overset{\wedge}{\Xi}_i \frac{\partial \vec{W}}{\partial \xi^j} - \frac{\partial \vec{W}}{\partial \xi^i} \frac{\partial \vec{W}}{\partial \xi^j} \right], \end{aligned} \quad (3.17)$$

мұндағы $\vec{w}$ -ден ξ^i координатасы бойынша алынған бірінші туынды тұтас орта нүктесінің салыстырмалы орын ауыстыруын сипаттайды.

$\vec{w}$ орын ауыстыру векторын, $\hat{\Xi}_1$ актуальді кеңістікте, сол сияқты $\overset{o}{\Xi}_1$ бастапқы кеңістікте жіктеп, соған сәйкес $\vec{w}$ векторының екі түрлі компоненттерін

$$\vec{w} = \hat{w}^k \hat{\Xi}_k = \overset{o}{w}^k \overset{o}{\Xi}_k,$$

сонымен қатар екі түрлі ковариантты туындыны да енгізуге болады

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^k} = \overset{o}{\nabla}_k \overset{o}{w}^k \overset{o}{\Xi}_k \quad \text{және} \quad \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^k} = \hat{\nabla}_k \hat{w}^k \hat{\Xi}_k. \quad (3.18)$$

(3.18)- дегі бірінші өрнекті (3.17)-ге қойып мынаны аламыз

$$\overset{o}{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left[\left(\overset{o}{\nabla}_j \overset{o}{w}^k \right) \overset{o}{g}_{ki} + \left(\overset{o}{\nabla}_i \overset{o}{w}^k \right) \overset{o}{g}_{kj} + \left(\overset{o}{\nabla}_i \overset{o}{w}^k \overset{o}{\nabla}_j \overset{o}{w}^e \right) \overset{o}{g}_{ke} \right].$$

Метрикалық тензордың қасиеттерін пайдаланып төмендегідей формулаға келеміз

$$\overset{o}{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left[\overset{o}{\nabla}_j \overset{o}{w}_i + \overset{o}{\nabla}_i \overset{o}{w}_j + \overset{o}{\nabla}_i \overset{o}{w}_k \overset{o}{\nabla}_j \overset{o}{w}^k \right]. \quad (3.19)$$

Сол сияқты (3.18)- дегі екінші өрнекті (3.17)-ге қойып

$$\hat{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left[\hat{\nabla}_j \hat{w}_i + \hat{\nabla}_i \hat{w}_j - \hat{\nabla}_i \hat{w}_k \hat{\nabla}_j \hat{w}^k \right] \quad (3.20)$$

аламыз.

Шексіз аз салыстырмалы орын ауыстыру жағдайында соңғы квадраттық мүшелерді ескермеуге болады

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[\overset{o}{\nabla}_j \overset{o}{w}_i + \overset{o}{\nabla}_i \overset{o}{w}_j \right] = \frac{1}{2} \left[\hat{\nabla}_j \hat{w}_i + \hat{\nabla}_i \hat{w}_j \right]. \quad (3.21)$$

Декарт координаталар жүйесінде

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_j}{\partial x^i} + \frac{\partial w_i}{\partial x^j} \right). \quad (3.22)$$

Соңғы (3.22) формуладан ε_{ij} деформация тензорының симметриялылығы көрініп тұр.

Ескерте кететін жай, деформация тензорының компоненттері үшін (3.17), (3.19) және (3.20) формулалары, қозғалыстағы ортаның барлық нүктелеріне орын ауыстыру векторын $\vec{W}$ енгізуге болатын кезде ғана орындалады. Орын ауыстыру векторының $\vec{W}$ бар-жоқтығы белгісіз жағдайда да деформация тензоры және оның компоненттері $\overset{o}{g}_{ij}$, $\oversw{g}_{ij}$ метрикалары арқылы анықталады.

3.3.3. Деформация үйлесімділігінің шарттары

Деформация тензорының 9 компоненттері бар. ε_{ij} симметриялы болғандықтан компоненттердің алтауы ғана әр түрлі болады. Орын ауыстыру векторы $\vec{W}$ бар болған жағдайда, бұл ε_{ij} -дің алты компоненттері (3.21) формуласы бойынша

әрбір берілген нүктеде $\frac{\partial w_i}{\partial \xi^j}$ тоғыз туындысы арқылы

өрнектеледі және сондықтан кеңістіктің берілген нүктесінде олар кез келген сандар. Бірақта ε_{ij} кеңістіктің ξ^1, ξ^2, ξ^3 нүктелерінің кез келген функциясы бола алмайды, себебі орын ауыстыру векторының тек үш қана W_i компоненттері бар. Сондықтан ε_{ij} деформация үйлесімділігі деп аталынатын белгілі бір теңдеулерді қанағаттандыруы қажет.

Үйлесімділік теңдеуі орын ауыстыру векторы $\vec{w}$ бар болған кезде ғана болуы қажет. Бір мәнді және үздіксіз орын ауыстыру векторының компоненттерінің болуы, деформация тензорына, яғни деформация үйлесімділігінің шартына шек қойылғандылығын білдіреді.

Орын ауыстыру векторының базис векторына $\vec{\Xi}_i$ эквивалентті екендігін көрсетуге болады

$$\vec{\Xi}_i = \frac{\partial \vec{\Gamma}}{\partial \xi^i}, \text{ онда } \frac{\partial \vec{\Xi}_i}{\partial \xi^k} = \left(\frac{\partial \vec{\Xi}_i}{\partial \xi^k} \vec{\Xi}^j \right) \vec{\Xi}_j = \Gamma_{ik}^j \vec{\Xi}_j, \quad (3.23)$$

мұндағы Γ_{ik}^j метрикалық тензор $g_{ij} = \vec{\Xi}_i \vec{\Xi}_j$ арқылы ((1.11) қара) өрнектеледі және берілген деформация тензоры бойынша анықталады. Сондықтан (3.23) формуласы $\vec{\Xi}_j$ векторына қатысты сызықты дифференциалды теңдеу болып табылады, яғни

$$\frac{\partial^2 \vec{w}}{\partial \xi^i \partial \xi^k} = \Gamma_{ik}^j \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j}. \quad (3.24)$$

(3.24) теңдеулер жүйесінің шешімдері бар болу шартын анықтайық. (3.23) теңдеуін $d\xi^k$ көбейтейік, сонда

$$d\vec{\Xi}_i = \Gamma_{ik}^j \vec{\Xi}_j d\xi^k.$$

Оң жақтағы толық дифференциал бар болуы үшін қажетті және жеткілікті шарттар, ал олай болса (3.23) теңдеуінің шешімдері бар болатын шарттар

$$\frac{\partial(\Gamma_{ik}^j \vec{\Xi}_j)}{\partial \xi^e} = \frac{\partial(\Gamma_{ie}^j \vec{\Xi}_j)}{\partial \xi^i}. \quad (3.25)$$

Егер деформация тензорының компоненттері ε_{ij} декарт координаталарының функциясы ретінде анық түрде берілген болса, онда шексіз аз салыстырмалы орын ауыстыру жағдайында алты тәуелсіз теңдеулерді (3.22)-ні, яғни

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x^j} + \frac{\partial w_j}{\partial x^i} \right)$$

орын ауыстыру векторының w_i үш компоненттерін анықтауға арналған алты теңдеулер жүйесінің дербес туындылары ретінде қарастыруға болады.

Жүйе артық анықталғандықтан және жалпы жағдайда ε_{ij} компоненттерін еркін таңдағандықтан теңдеулердің шешімдері болмайды.

3.3.4. Деформация тензорының бас осьтері мен бас компоненттері

Әрбір симметриялық тензормен, соның ішінде деформация тензорымен квадраттық форманы $\varepsilon_{ij} d\xi^i d\xi^j$ байланыстыруға болады. Кез келген нүктеде ортогональ координаталар жүйесін (η^1, η^2, η^3) табуға мүмкін болса, квадраттық форма $\varepsilon_{ij} d\xi^i d\xi^j$ мына түрге келеді

$$\varepsilon_{ij} d\xi^i d\xi^j = \varepsilon_{11} (d\eta^1)^2 + \varepsilon_{22} (d\eta^2)^2 + \varepsilon_{33} (d\eta^3)^2.$$

ξ^i - ден η^i -ға түрлендіру ε_{ij} компоненттеріне байланысты. Сондықтан әр уақыт мезетіне сәйкес қозғалыстағы ортогональді триэдр жалпы айтқанда әртүрлі болады.

Егер $\overset{o}{g}_{ij}$ кеңістігінде ортогональ осьтер η^1, η^2, η^3 табылса және олар қозғалыс нәтижесінде $\hat{g}_{ij}$ кеңістігіндегі η^1, η^2, η^3 осьтердің бағыттарына өткенде базис векторлары $\vec{e}_i$ ортогональ болып қалса, ондай осьтер **деформация тензорының бас осьтері** деп аталады. Сонымен қиғаштану бұрышы $\chi_{ij} = 0$ және

$$g_{ij}^0 = g_{ij}^{\wedge} = \varepsilon_{ij} = 0, \quad i \neq j.$$

Сол себепті бас осьтердің арасындағы бұрыштар қиғаштанбайды және бас осьтердің ортогональ триэдрі абсолют қатты дене сияқты орын ауыстырады, яғни ілгерілемелі ығысады және айналады. Бұл кезде бас осьтердің бойынан алынған $d\vec{r}$ элементі, қозғалыс кезінде сығылуы немесе созылуы мүмкін.

Деформация тензорының бас осьтері $t = t_0$ және $t = t'$ уақыт мезгілдерінде ортаның сол баяғы жеке бөлшектері арқылы өтеді.

t уақыт мезетінде деформация тензорының бас осьтері η^1, η^2, η^3 бойымен

$$ds_i^2 = g_{ii}^{\wedge} (d\eta^i)^2$$

және бас осьтердегі ұзындықтың квадратын төмендегідей түрге келтіруге болады

$$ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2 + ds_3^2.$$

Сол сияқты «бастапқы күйде» төмендегі тендіктер орындалады

$$ds_{oi}^2 = g_{ii}^0 (d\eta^i)^2, \quad ds_{oi}^2 = ds_{01}^2 + ds_{02}^2 + ds_{03}^2.$$

Қарастырылып отырған нүктенің маңында бас осьтер бойынан алынған элементар кесінділер ds_i және ds_{oi} тап осы күйде және соған сәйкес белгілі «бастапқы күйде» кәдімгі тік бұрышты декарт координатасы ретінде қарастырылады.

Деформация тензорының ковариантты компоненттерінің анықтамасын пайдалансақ

$$ds^2 - ds_0^2 = 2 \sum_i \frac{\varepsilon'_{ii}}{g_{ii}^{\wedge}} ds_i^2 = 2 \sum_i \frac{\varepsilon'_{ii}}{g_{ii}} ds_{0i}^2,$$

ε'_{ii} -дегі штрих деформация тензорының ковариантты компоненттері бас осьтен алынғандығын көрсетеді. $\varepsilon'_{ii} / \hat{g}_{ii}$ және $\varepsilon'_{ii} / g_{ii}^0$ қатынастары сәйкес мынаған тең болады

$$\varepsilon'_{ii} \hat{g}_{ii} = \varepsilon_i, \quad \varepsilon'_{ii} g_{ii}^0 = \varepsilon_i \quad \text{және}$$

$$\begin{aligned} ds^2 - ds_0^2 &= 2 \left(\hat{\varepsilon}_1 ds_1^2 + \hat{\varepsilon}_2 ds_2^2 + \hat{\varepsilon}_3 ds_3^2 \right) = \\ &= 2 \left(\varepsilon_1 ds_{01}^2 + \varepsilon_2 ds_{02}^2 + \varepsilon_3 ds_{03}^2 \right). \end{aligned}$$

Сондай-ақ, қозғалатын ортаның әрбір нүктесін деформация тензорының бас осінің бойымен бағытталған әдеттегі ортогональді декарт координаталар жүйесімен s_{01}, s_{02}, s_{03} байланыстыруға болады, сонда қозғалыс процесінде тағыда дағдылы ортогональ декарт координаталар жүйесіне s_1, s_2, s_3 көшеді. Бұл жүйедегі деформация тензорына сәйкес $\hat{\varepsilon}_i$ және ε_i тензорлар компоненттері әртүрлі басты компоненттер болып табылады. Жалпы жағдайда $\hat{\varepsilon}_i \neq \varepsilon_i$, бірақ олардың арасында белгілі бір байланыс бар.

Бас бағыттарға қатысты мынаны аламыз

$$ds_i^2 - ds_{oi}^2 = 2 \hat{\varepsilon}_i ds_i^2 = 2 \varepsilon_i ds_{oi}^2,$$

бұдан мынадай екі теңдікке келеміз

$$\begin{aligned} 2 \hat{\varepsilon}_i &= 2 \varepsilon_i \frac{ds_{oi}^2}{ds_i^2} \\ 2 \varepsilon_i &= \frac{ds_i^2}{ds_{oi}^2} - 1 \quad \text{немесе} \quad \frac{ds_{oi}^2}{ds_i^2} = \frac{1}{1 + 2 \varepsilon_i}. \end{aligned}$$

Енді төмендегі теңдіктер орынды болғандықтан

$$\hat{2\varepsilon_i} = \frac{2\varepsilon_i^o}{1+2\varepsilon_i}, \quad \text{ал} \quad 1-\hat{2\varepsilon_i} = \frac{1}{1+2\varepsilon_i^o} \quad (3.26)$$

$$\hat{2\varepsilon_i} = 1 - \frac{ds_{oi}^2}{ds_i^2} \quad (3.3) \quad \text{өрнектен}$$

$$\frac{ds_{oi}^2}{ds_i^2} = 1 - \hat{2\varepsilon_i} = \left(\frac{1}{\ell_i + 1} \right)^2,$$

бұдан салыстырмалы ұзару коэффициенттері үшін мынадай өрнекті алуға болады, яғни

$$\ell_i = \sqrt{\frac{1}{1-\hat{2\varepsilon_i}}} - 1 \quad \text{немесе} \quad (3.26) \quad \text{ескеріп}$$

$$\ell_i = \sqrt{1 + 2\varepsilon_i^o} - 1. \quad (3.27)$$

Шексіз аз деформация жағдайында $\ell_i = \hat{\varepsilon_i} = \varepsilon_i^o$ бас осьтің бойымен бағытталған салыстырмалы ұзару коэффициенті «бастапқы күйдегі» және актуаль кеңістіктегі деформация тензорының бас компоненттерімен дәл келеді.

Мынадай матрицаны алайық $C = \|C_{ij}\| = \|\phi\delta_{ij} - \varepsilon_{ij}\|$, мұндағы ϕ - белгілі бір сандық параметр және оны да матрица деп түсінеміз

$$\|\phi\delta_{ij} - \hat{\varepsilon}_{ij}\|, \quad \text{сол сияқты} \quad \|\phi\delta_{ij} - \varepsilon_{ij}^o\|.$$

Бас осьтегі матрицаның түрі

$$C^* = \begin{vmatrix} \phi - \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \phi - \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \phi - \varepsilon_3 \end{vmatrix}.$$

Егер детерминантты алып оны нольге теңестірсек, ϕ -ға қатысты кубтық теңдеуді аламыз

$$(\phi - \varepsilon_1)(\phi - \varepsilon_2)(\phi - \varepsilon_3) = 0$$

немесе

$$\phi^3 - J_1\phi^2 + J_2\phi - J_3 = 0,$$

мұндағы

$$J_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \quad J_2 = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1, \quad J_3 = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$$

деформация тензорының бірінші, екінші, үшінші инварианттары. Бұл теңдеудің ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 түбірлері деформация тензорының $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ сәйкес бас компоненттері болып табылады.

ds және ds_0 сызықтық элементтердің актуальді және «бастапқы» күйлердегі сәйкестігін зерттегеннен кейін, осы күйлердегі элементар көлемдердің сәйкестігін табамыз. Деформация тензорының бас осінен бастапқы күйдегі қабырғалары $ds_{01}, ds_{02}, ds_{03}$, көлемі $dV_0 = ds_{01}ds_{02}ds_{03}$ формуласымен анықталатын элементар тік бұрышты параллелепипедті алайық. Оның қозғалысына тік бұрышты параллелепипедтің көлемі сәйкес келеді

$$dV = ds_1ds_2ds_3.$$

Көлемнің салыстырмалы өзгерісінің шамасын θ **көлемдік ұлғаю коэффициенті** деп атайды

$$\theta = \frac{dV - dV_0}{dV_0} = \left(\frac{ds_1}{ds_{01}} \right) \left(\frac{ds_2}{ds_{02}} \right) \left(\frac{ds_3}{ds_{03}} \right) - 1.$$

$ds_i^2 - ds_{oi}^2 = 2 \overset{o}{\varepsilon}_i ds_{oi}^2$ болғандықтан, θ -ны басқаша түрде жазуға болады

$$\theta = \sqrt{\left(1 + 2 \overset{o}{\varepsilon}_1 \right) \left(1 + 2 \overset{o}{\varepsilon}_2 \right) \left(1 + 2 \overset{o}{\varepsilon}_3 \right)} - 1 \quad (3.28)$$

немесе

$$\theta = \sqrt{1 + 2 \overset{o}{J}_1 + 4 \overset{o}{J}_2 + 8 \overset{o}{J}_3}.$$

Сонымен θ шамасы инвариантты геометриялық характеристика. Шексіз аз деформация кезінде

$$\theta \approx J_1 = \sum \overset{\wedge}{\varepsilon}_i = \sum \overset{o}{\varepsilon}_i. \quad (3.29)$$

3.4. Деформация жылдамдықтарының тензоры. Коши-Гельмгольц теоремасы

3.4.1. Деформация жылдамдықтарының тензорын анықтау

Деформациялар тензоры

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\hat{g}_{ij} - \overset{o}{g}_{ij} \right)$$

тұтас ортаның екі метрикалық күйіне байланысты $\hat{g}_{ij}$ (тап осы қазіргі) және жалпы айтқанда $\overset{o}{g}_{ij}$ («бастапқы» күйлері) арқылы ендіріледі. Егер бастапқы күй $\overset{o}{g}_{ij}$ шын мәнінде жүзеге асса, онда тұтас ортаның барлық нүктелерінде $\vec{w}$ орын ауыстыру

векторын пайдалануға болады. Басқаша айтқанда t_0 уақыт мезетіндегі бастапқы күйден қарастырып отырған t уақыт мезетіндегі күйінде $\vec{w}$ бар болады.

Тұтас ортаның бұл екі күйінен басқа $t + \Delta t$ уақыт мезгіліндегі қарастырылған тап қазіргі күйіне $\hat{g}_{ij}$ жақын тағы бір күйін қарастырайық. $t + \Delta t$ мезгіліндегі метрикалық тензордың компоненттерін $\hat{g}'_{ij}$ арқылы белгілейік. Сірә t және $t + \Delta t$ мезгіліндегі тұтас орта күйлеріне қатысты деформация тензорының компоненттерін енгізуге болады ((3.3.3) қара). Бұл компоненттерді $\Delta \varepsilon_{ij}$ арқылы белгілейік.

$$\Delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\hat{g}'_{ij} - \hat{g}_{ij} \right) = \frac{1}{2} \left[\nabla_i w_j + \nabla_j w_i + \nabla_i w^e \nabla_j w_e \right], \quad (3.30)$$

мұндағы ∇_i, ∇_j - ковариантты туындылар бұл жағдайда бастапқы кеңістікте $\hat{g}_{ij}$ есептелінеді, яғни

$$\nabla_i = \hat{\nabla}_i, \quad \nabla_j = \hat{\nabla}_j, \quad \vec{w} = w_i \hat{\Xi}^i.$$

Орын ауыстыру $\vec{w}$ векторы t мезгіліндегі күйді, $t + \Delta t$ мезгіліндегі күймен байланыстырғандықтан (3.30) формуласы орынды. Шынында да, $\vec{w} = w_i \hat{\Xi}^i = \vec{v} \Delta t = v_i \hat{\Xi}^i \Delta t$, мұндағы $w_i = v_i \Delta t$ -ның реті Δt - мен шамалас, егер Δt аз болса, онда орын ауыстыру векторы да шексіз аз болады. Сондықтан (3.30) негізінде

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varepsilon_{ij}}{\Delta t} = \frac{1}{2} (\nabla_i v_j + \nabla_j v_i) = e_{ij}.$$

e_{ij} шамасы **деформация жылдамдықтарының тензоры** деп аталынатын симметриялық тензордың компоненттері.

Егер жылдамдықтар өрісі $\vec{v}$ белгілі болса, онда e_{ij} компоненттерін мына формуламен есептеуге болады

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i v_j + \nabla_j v_i). \quad (3.31)$$

(3.31)-де көрсетілгендей, деформация жылдамдықтары тензорының компоненттері үшін, ілеспелі координаталар жүйесінде төменгі формула дұрыс

$$\hat{e}_{ij} = \frac{1}{2} \frac{d \hat{g}_{ij}}{dt}.$$

Егер «бастапқы күй» $\overset{o}{g}_{ij}$ уақытқа тәуелсіз болса, онда деформациялар тензорының компоненттері мен ілеспелі координаталар жүйесіндегі деформация жылдамдықтарының тензоры төмендегі қатынаспен байланысқандығын оңай табуға болады

$$\hat{e}_{ij} = \frac{d \overset{\wedge}{\varepsilon}_{ij}}{dt}.$$

Ескертетін мәселе, **деформациялар тензоры ε_{ij} тұтас ортаның екі күйін салыстыру нәтижесінде енгізілген, ал деформация жылдамдықтарының тензоры тап қазіргі күйдің берілген уақыт мезгіліндегі характеристикасы болып табылады.**

Деформация тензоры симметриялы болғандықтан e_{ij} екінші рангілі симметриялық тензор болып табылады, олар үшін де бас осьтер, бас компоненттер, инварианттар $(J^{**}_1, J^{**}_2, J^{**}_3)$ ұғымы болады.

3.4.2. Тұтас орта бөлісегінің маңындағы жылдамдықтардың таралуы. Коши-Гельмгольц теоремасы

Бөлшектермен толтырылған тұтас ортаның шексіз аз dV көлемін алайық. Әрбір бөлшек әртүрлі уақыт мезгілінде өзіне тиісті жылдамдыққа ие болады, яғни dV көлемінде үздіксіз деп есептелетін $\vec{V}$ жылдамдық және оның үздіксіз туындысы бар болады. M_0 нүктесінің радиус-векторы – $\vec{r}_0$, ал M нүктесінің радиус-векторы – $\vec{r}$ болсын, сонда

$$\Delta \vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0.$$

Кез келген M нүктесінің қозғалыс жылдамдығын $\vec{V}$, оған сыбайлас M_0 нүктесінің қозғалыс жылдамдығын $\vec{V}_0$ арқылы белгілейік. Ол үшін M нүктесінің маңындағы $\vec{V}$ жылдамдықты Тейлор қатарына жіктейік

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial \xi^i} \right)_0 \Delta r^i + O(\Delta r) \quad (3.32)$$

немесе

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \nabla_i v_j \vec{\varepsilon}^j \Delta r^i = \vec{V}_0 + e_{ij} \vec{\varepsilon}^j \Delta r^i + \omega_{ij} \vec{\varepsilon}^j \Delta r^i. \quad (3.33)$$

Соңғы формуладағы e_{ij} және ω_{ij} – сәйкес симметриялық және антисимметриялық тензорлар:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i v_j + \nabla_j v_i), \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i v_j - \nabla_j v_i).$$

(3.33) формуладағы әрбір мүшенің механикалық мағынасын қарастырайық. Егер деформация жылдамдығының тензоры $e_{ij}=0$ болса, онда

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \omega_{ij} \vec{\varepsilon}^j \Delta r^i \quad (3.34)$$

M нүктесінің маңындағы қозғалыс абсолют қатты дененің айналмалы қозғалысы сияқты болады. $\omega_{ij}=0$ жағдайында (3.34) формуласы $\vec{V}_0$ жылдамдығымен қозғалатын абсолют қатты

дененің ілгерілемелі қозғалысын анықтайды. Осы себептен егер күйінды тензор ω_{ij} барлық нүктелерде нольге айналса, жылдамдық өрісін **күйінсыз өріс** (потенциалдық) деп атайды.

Деформация жылдамдықтары тензорының компоненттерінің физикалық мағынасы мынадай. Диагональ компоненттері e_{ii} тұтас орта кесінділерінің салыстырмалы ұзару жылдамдықтарын, ал диагональ емес компоненттері e_{ij} алғашқы тік бұрыштардың ((3.13) қара) қиғаштану жылдамдықтарын сипаттайды.

Жоғарыда айтылған пікірлердің нәтижелері тұтас ортаның шексіз аз бөлшектері орналасқан нүктелердің жылдамдықтарын жіктейтін **Коши-Гельмгольц теоремасына** әкеледі: «Тұтас ортаның элементар көлемінің кез келген қозғалысын берілген мезгілде екі қозғалыстың қосындысының нәтижесі, яғни квазикатты және деформациялы қозғалыстар», деп қарастыруға болады: атап айтқанда

$$\vec{V} = \vec{V}_{\text{кк.}} + \vec{V}_{\text{деф.}} = \vec{V}_o + \vec{V}_{\text{айнал.}} + \vec{V}_{\text{деф.}}.$$

3.5. Скалярлық өрістер және оның негізгі қасиеттері

Тұтас орта қозғалысын зерттегенде (x^1, x^2, x^3) немесе (ξ^1, ξ^2, ξ^3) координаталарының функциялары болатын скалярлық және векторлық шамаларды ендіру қажет. Осы әрбір координаталар жүйесінен белгілі бір облысты бөліп алып және осы облыстың әрбір нүктесіне сәйкес температураның T , жылдамдықтың $\vec{V}$ немесе одан да күрделі характеристикалардың сан мәнін қоюға болады. Қарастырылып отырған облыстың әрбір нүктесінде берілген шамалар мәндерінің жиынтығы сол шамалардың (скалярлық, векторлық) өрістері деп аталады.

Температура және жылдамдық өрістерінің мысалынан олардың кейбір ортақ характеристикаларын зерттейік. Егер температураның таралуы Лагранж айнмалылары арқылы

берілсе, онда тұтас орта бөлшектерінің бірлік t уақыттағы температурасының өзгерісін $T(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t)$ есептеу оңай. Ол температурадан уақыт бойынша алынған туындыға $\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{\xi^i}$ тең.

Егер температураның таралуы Эйлер айнымалылары арқылы берілсе, онда бұл туындыны есептегенде Лагранж айнымалыларына көшіп

$$T(x^i, t) = T[\xi^k, t], t$$

және күрделі функцияны дифференциалдау ережесін пайдалану қажет. Сонда

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{\xi^k} = \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{x^i} + \frac{\partial T}{\partial x^1} \left(\frac{\partial x^1}{\partial t}\right)_{\xi^k} + \frac{\partial T}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x^2}{\partial t}\right)_{\xi^k} + \frac{\partial T}{\partial x^3} \left(\frac{\partial x^3}{\partial t}\right)_{\xi^k},$$

$\frac{\partial x^i}{\partial t}$ туындысы ξ^k тұрақты болған жағдайда алынады және

v^i жылдамдық векторының компоненттері болып табылады. Сондықтан

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{\xi^k} = \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{x^i} + v^k \frac{\partial T}{\partial x_k}$$

немесе

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + v^k \frac{\partial T}{\partial x^k}.$$

$\frac{dT}{dt}$ туындысы тұтас ортаның берілген нүктесіндегі уақытқа байланысты температураның өзгерісін сипаттайды және уақыт бойынша температураның **толық туындысы** делінеді. $\frac{\partial T}{\partial t}$ туындысы кеңістіктің берілген нүктесіндегі бірлік уақыттағы

температураның өзгерісін сипаттайды және **локальдық**

туынды деп аталады. $v^i \frac{\partial T}{\partial x^i}$ туындысы кеңістіктің бір

нүктесінен белгіленген уақыт мезетінде оған шексіз жақын жатқан нүктеге орын ауыстырғандағы температураның өзгерісін сипаттайды және **конвективті туынды** деп аталады. Егер процесс стационар болса, онда оларды сипаттайтын барлық шамалардан уақыт бойынша алынған локальдық туынды нольге тең

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial v^i}{\partial t} = \dots = 0.$$

Конвективті туынды $v^i \frac{\partial T}{\partial x^i}$ қозғалыс болмаған жағдайда

немесе температураның градиенті жоқ кезде, яғни температураның скаляр өрісі біртекті болғанда нольге тең

$$v^i \frac{\partial T}{\partial x^i} = 0.$$

Кез келген векторлық өріске мысалы, жылдамдық өрісі үшін енгізуге болатын векторлық сызықтардың мағынасын зерттеуге көшейік. Практикада көбінесе ағын сызықтарын білу қажет. **Ағын сызығының қасиеті** – берілген уақыт мезетінде жылдамдық векторы $\vec{v}$ ағын сызығының барлық нүктесіне жанама болып келеді. Осы анықтамадан ағын сызықтарының бойынан алынған элемент

$$d\vec{r} = dx^1 \vec{e}_1 + dx^2 \vec{e}_2 + dx^3 \vec{e}_3$$

және жылдамдық векторы

$$\vec{v} = v^1 \vec{e}_1 + v^2 \vec{e}_2 + v^3 \vec{e}_3$$

бір-біріне параллель, яғни

$$d\vec{r} = d\mathfrak{R} \cdot \vec{v}$$

мұндағы $d\mathfrak{R}$ —скаляр параметр. Ал енді жылдамдықтың компоненттері арқылы жазсақ

$$\frac{dx^1}{v^1} = \frac{dx^2}{v^2} = \frac{dx^3}{v^3} = d\Re$$

немесе

$$\frac{dx^i}{d\Re} = v^i(x^1, x^2, x^3, t), \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.35)$$

Бұл ағын сызығының дифференциалдық теңдеуі. Ол орта бөлшектерінің қозғалыс траекториясының дифференциалдық теңдеуінен өзгеше

$$\frac{dx^i}{dt} = v^i(x^1, x^2, x^3, t). \quad (3.36)$$

(3.35) теңдеуін интегралдағанда t тұрақты параметр деп, ал (3.36) теңдеуіндегі t айнымалы деп есептеу қажет.

Стационар қозғалыс кезінде ағын сызығы мен траектория бір - бірімен беттеседі.

“C” контурдың әрбір нүктесі арқылы ағын сызықтарын жүргізуге болады. Егер “C”-ның өзі ағын сызығы болмаса, онда ағын сызығының беті пайда болады. Егер “C” контуры тұйық болса, онда **ағын түтікшесі** делінеді. Ағын түтікшесінің ішіндегі сұйықтың шығымы тұрақты болады. Кез келген векторлық өрісте осындай жолмен жасалынған түтікше **векторлық түтікше** деп аталынады.

Кез келген векторлық өріс сияқты, құйын жылдамдығы $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{v}$ векторының өрісі үшін де құйын сызықтары мен түтікшелері ұғымын енгізуге болады. **Құйын сызығының барлық нүктесіне құйын векторы $\vec{\omega}$ жанама болып келеді.** Құйын сызығының дифференциалдық теңдеуі

$$\frac{dx^1}{\omega^1} = \frac{dx^2}{\omega^2} = \frac{dx^3}{\omega^3} = d\Re. \quad (3.37)$$

Құйын сызықтарына жоғарыда айтылған ағын сызықтарының барлық қасиеттері сәйкес келеді.

3.6. Стокс, Гаусс-Остроградский формулалары және вектор өрісінің қасиеттері

Координата бойынша бірінші ретті туындысы бар $\vec{A}$ векторының белгілі бір үздіксіз өрісі болсын. Егер $\vec{A}$ вектор болатын болса, онда $\vec{\Omega}$ векторы (мысалы, декарт координаталар жүйесіндегі түрі)

$$\vec{\Omega} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} \\ A^1 & A^2 & A^3 \end{vmatrix} = \vec{i} \left(\frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial A^1}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^1} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial A^2}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^2} \right) \quad (3.38)$$

$\vec{A}$ векторының ротациясы делінеді және былай белгіленеді

$$\vec{\Omega} = \text{rot } \vec{A}.$$

Өзімізге белгілі, (3.31) деформация жылдамдықтары тензорының компоненттерін (3.34) арқылы кез келген координаталар жүйесіндегі бірінші инвариант түрінде жазуға болады

$$e_1 + e_2 + e_3 = e_{ii} = \nabla_i v^i.$$

Анықтама бойынша инварианттық шама $\nabla_i v^i$ **жылдамдық векторының дивергенциясы** деп аталады және былай белгіленеді

$$\text{div } \vec{v} = \nabla_i v^i. \quad (3.39)$$

Декарт координаталар жүйесінде

$$\text{div } \vec{v} = \frac{\partial v^1}{\partial x^1} + \frac{\partial v^2}{\partial x^2} + \frac{\partial v^3}{\partial x^3}.$$

(3.39) сияқты $\vec{A}$ векторының дивергенциясын былай анықтауға болады

$$\operatorname{div} \vec{A} = \nabla_i A^i,$$

немесе декарт координаталар жүйесінде

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A^1}{\partial x^1} + \frac{\partial A^2}{\partial x^2} + \frac{\partial A^3}{\partial x^3}.$$

(3.38) ескерсек, құйын векторы $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{v}$ – жылдамдық векторы ротациясының жартысына тең.

$\vec{A}$ векторлық өрісті анықтайтын облыстан ажыратылған (тұйық емес) L немесе тұйық C контурын алайық. $\vec{A} \cdot d\vec{s}$ скалярлық көбейтіндісі инвариантты шама болып табылады, мұндағы $d\vec{s}$ - L немесе C контурының бағытталған элементі. L контуры бойынша алынған Γ скаляр $\vec{A}$ векторының циркуляциясы деп аталынатын интегралды қарастырайық

$$\int_{AB} (\vec{A} \cdot d\vec{s}) = \Gamma.$$

Контур бойынша айналу бағыты, мысалы, A нүктесінен B нүктесіне қарай көрсетілуі керек. Шынында да

$$\Gamma_{AB} = -\Gamma_{BA}.$$

Егер $\vec{A}$ векторының орнына тұтас орта нүктелерінің жылдамдығы $\vec{v}$ -ны қойсақ, онда

$$\Gamma = \int_L (\vec{v} \cdot d\vec{s}) = \int_L (v^1 dx^1 + v^2 dx^2 + v^3 dx^3) = \int_L (v^i dx^i)$$

жылдамдықтың циркуляциясы делінеді.

Потенциалдық (құйынсыз) қозғалыс жағдайында $\operatorname{rot} \vec{v} = 0$, жылдамдық векторы $\vec{v}$ мен потенциал φ төмендегідей байланыста болады

$$\vec{v} = \operatorname{grad} \varphi,$$

сонымен $\varphi(x^k, t)$ – **жылдамдықтың потенциалы** деп аталады. Бұл жағдайда

$$\Gamma = \int_{AB} \frac{\partial \varphi}{\partial s} ds = \varphi(B) - \varphi(A),$$

осыдан жылдамдық циркуляциясының А және В нүктелерінің координаталарына тәуелділігі шығады.

$\vec{v}$ жылдамдығын потенциалды емес ($\text{rot } v \neq 0$) деп алайық. С тұйық контурына σ тегіс беті керілген болсын дейік. Ондағы $\vec{v}$ өрісі үздіксіз және дифференциалданатын болсын, яғни С контурын тек үздіксіз дифференциалданатын σ ауданда қалдыра отырып, бір нүктеге келтіруге болатын болса, онда Стокс теоремасы орындалады

$$\int_C \vec{v} \cdot \vec{\tau} ds = \int_{\sigma} \vec{n} \cdot (\nabla \cdot \vec{v}) d\sigma$$

(3.40)

немесе

$$\int_C v_s ds = \int_{\sigma} (\text{rot } \vec{v})_n d\sigma.$$

Стокс теоремасының тұжырымдамасы: С тұйық контуры бойынша алынған циркуляция жылдамдығы осы контурға керілген σ беті арқылы өтетін құйын векторы ағынының екі еселенген шамасына тең (мұндағы $\vec{\tau}$ және $\vec{n}$ - С контурының жанама және нормаль бірлік векторлары).

Шынында да, Стокс теоремасы тұтас ортаның $\vec{v}$ жылдамдық векторы үшін ғана орындалмайды, кез келген басқа үздіксіздік және дифференциалданатын қажетті шарттарды қанағаттандыратын $\vec{A} = A_i \vec{e}^i$ векторы үшін де орындалады.

Енді $\vec{A}$ векторы үшін Стокс теоремасын әртүрлі түрде жазайық:

$$\begin{aligned}
\int_C A_s ds &= \int_C A_i dx^i = \int_\sigma (\text{rot } \vec{A})_n d\sigma = \\
&= \int_\sigma \left[\left(\frac{\partial A_3}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial x^3} \right) \cos(n, x^1) + \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\partial A_1}{\partial x^3} - \frac{\partial A_3}{\partial x^1} \right) \cos(n, x^2) + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2} \right) \cos(n, x^3) \right] d\sigma.
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Егер облысқа кіретін барлық нүктелерде $\vec{\omega} = 0$ болса, онда осы облыста тұтас орта қозғалысын **құйынсыз**, ал $\vec{\omega} \neq 0$ **құйынды** деп атайды. Қарапайым жолмен тексеріп, егер $\vec{v} = \text{grad } \varphi$ болса, онда $\vec{\omega} = 0$ және Стокс теоремасының шарттарын қанағаттандыратын кез келген тұйық контур бойынша циркуляция нольге тең болады. Сонымен, егер қозғалыс **потенциалдық** болса, онда ол **құйынсыз** деп аталады. Және керісінше, егер қозғалыс **құйынсыз** болса $\vec{\omega} = 0$, онда ағын **потенциалдық**, яғни $\vec{v} = \text{grad } \varphi$ өрнегі орындалатын φ функциясы табылады.

Гаусс-Остроградский теоремасы σ тұйық беті арқылы алынған интегралды, осы σ бетімен шектелген V көлемі бойынша алынған интегралға түрлендіретін формула болып табылады. Дербес жағдайда, кез келген үздіксіз V көлемінің ішінде бірінші туындысы үздіксіз және σ бетінен $\vec{A}$ векторын жылдамдық ретінде алсақ, **Гаусс-Остроградский формуласы** (бұл теореманың дәлелі мұнда келтірілмейді) декарт координаталар жүйесінде былай жазылады

$$\int_\sigma \vec{n} \cdot \vec{A} d\sigma = \int_V \text{div } \vec{A} dV. \tag{3.42}$$

(3.42) формуласында интегралдың оң жақ және сол жақ астында координаталар жүйесін таңдауға тәуелсіз инвариантты шамалар тұр. Егер олар декарт координаталар жүйесінде белгілі болса, онда оны кез келген басқа координаталар жүйесі үшін есептеп шығаруға болады. Егер кез келген (η^1, η^2, η^3) жүйеде

$$\vec{A} = A^k \vec{e}_k, \quad \vec{n} = n_i \vec{e}^i$$

онда

$$\vec{A} \cdot \vec{n} = A^k n_k$$

және

$$\operatorname{div} \vec{A} = \nabla_k A^k = \frac{\partial A^k}{\partial x^k} + A^i \Gamma_{ki}^k$$

мұндағы Γ_{ki}^k Кристоффель символдары g_{ij} бойынша жоғарыдағы (3.19) формуласы арқылы есептеледі.

Енді Гаусс-Остроградский теоремасын келесі түрде жазуға болады

$$\int_{\sigma} n_k A^k d\sigma = \int_V \nabla_k A^k dV, \quad (3.43)$$

ол кез келген қисық сызықты координаталар жүйесінде орындалады.

Болашақта қажет болатын, векторлық анализдің формуласын қозғалмалы V көлемінен уақыт бойынша алынған дифференциалданатын интегралды келтірейік

$$\frac{d}{dt} \int_V f(x^k, t) dV = \int_V \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_i (f v^i) \right] dV, \quad (3.44)$$

мұндағы f -кеңістік пен уақыт координатасындағы нүктелерге тәуелді кез келген функция. V интегралдау облысы, қозғалмалы және дифференциалдау нәтижесі V көлемінің нүктелері қозғалатын $\vec{v}$ өріс жылдамдығын дифференциалдауға тәуелді.

Есептер мен жаттығулар

1. Сферада орналасқан Эйлер айнаымалылары арқылы берілген жылдамдықтар өрісі төмендегідей

$$v_1 = cx_2 - bx_3, \quad v_2 = ax_3 - cx_1, \quad v_3 = bx_1 - ax_2,$$

мұндағы a , b және c – тұрақты сандар. Ортаның бөлшектері шеңбер бойымен қозғалатындығын көрсетіңіз.

Шешуі. Орта бөлшектерінің траекторияларын анықтайтын теңдеулерді

$$\frac{dx_1}{dt} = cx_2 - bx_3, \quad \frac{dx_2}{dt} = ax_3 - cx_1, \quad \frac{dx_3}{dt} = bx_1 - ax_2$$

пайдаланып сәйкес a , b , және c -ға көбейтіп, одан кейін оларды қосып мынаны аламыз

$$a \frac{dx_1}{dt} + b \frac{dx_2}{dt} + c \frac{dx_3}{dt} = 0,$$

интегралдағаннан кейін

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = A = \text{const},$$

яғни траекториялары жазықтықта орналасқан. Екінші жағынан төмендегідей теңдеуді алуға болады

$$x_1 \frac{dx_1}{dt} + x_2 \frac{dx_2}{dt} + x_3 \frac{dx_3}{dt} = 0$$

осыны интегралдасақ

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = B^2 = \text{const},$$

яғни сферада орналасқан траекторияларды береді. Сол себепті біріншіден бөлшек жазықтықта орналасады, екіншіден сфераның бетімен қозғалады. Мұндай жағдай ортаның бөлшектері сфера сегментінің шеңберімен қозғалғанда ғана орындалады.

2. Жылдамдықтар өрісі берілген

$$v_1 = x_1^3, \quad v_2 = x_2^2, \quad v_3 = x_3.$$

Үдеу векторының сәйкес координаталар осіндегі проекциясын және $A(1,2,1)$ нүктесі арқылы өтетін ағын сызығының теңдеуін табыңыз.

Жауабы. $a_1 = 3x_1^5, \quad a_2 = 2x_2^3, \quad a_3 = x_3;$

$$\frac{1}{2x_1^2} - \frac{1}{x_2} = 0, \quad \frac{1}{x_2} + \ln x_3 = \frac{1}{2}.$$

3. Тұтас ортаның қозғалысы Эйлер әдісі арқылы төмендегідей түрде берілген

$$v_1 = ax_1, \quad v_2 = -bx_2, \quad v_3 = 0 \quad (a, b > 0).$$

$A(x_1^0, x_2^0)$ нүктесі арқылы өтетін ағын сызығының теңдеуін табыңыз. Лагранж айнымалылары түріндегі жылдамдық пен үдеудің компоненттерін анықтаңыз.

Жауабы. $x_1^b x_2^a = \text{const} = x_{01}^b x_{02}^a;$

$$v_1 = a\xi_1 e^{at}, \quad v_2 = -b\xi_2 e^{-bt}, \quad v_3 = 0;$$

$$a_1 = a^2 \xi_1 e^{at}, \quad a_2 = b^2 \xi_2 e^{-bt}, \quad a_3 = 0.$$

4. Жылдамдықтар өрісі берілген

$$v_1 = \frac{x_1}{x_1 - t}, \quad v_2 = \frac{x_2}{x_2 + t}, \quad v_3 = 0.$$

$t=1$ уақыт мезетінде $A(3,1,0)$ нүктесі арқылы өтетін ағын сызығының теңдеуін және үдеудің компоненттерін анықтаңыз.

Жауабы. $x_1 - x_2 - t \ln \frac{x_1 x_2}{3} = 2;$

$$a_1 = \frac{x_1(x_1 - 2t)}{(x_1 - t)^3}, \quad a_2 = -\frac{x_2^2}{(x_2 + t)^3}, \quad a_3 = 0.$$

5. Тұтас ортаның қозғалысы Эйлер әдісі арқылы төмендегідей түрде берілген

$$v_1 = x_1 + t, \quad v_2 = -x_2 + t, \quad v_3 = 0.$$

$t = 0$ уақыт мезетіндегі $A(-1, -1, 0)$ нүктесі арқылы өтетін ағын сызығын анықтаңыз. $t = 0$ уақыт мезетінде A нүктесінде болған бөлшектің траекториясын табыңыз.

Жауабы. $x_1 x_2 = 1, \quad x_1 + x_2 + 2 = 0.$

6. Егер жылдамдықтар өрісі төмендегідей түрде берілсе

$$v_1 = x_1 x_2, \quad v_2 = x_2 x_3, \quad v_3 = x_1 x_3$$

ортаның стационар қозғалысының құйынды екендігін анықтаңыз.

Жауабы. $\omega_1 = -\frac{x_2}{2}, \quad \omega_2 = -\frac{x_3}{2}, \quad \omega_3 = -\frac{x_1}{2},$

яғни ортаның қозғалысы құйынды болады.

7. Эйлер айнымалылары арқылы өрнектелген жылдамдықтар өрісі

$$v_1 = -kx_2, \quad v_2 = kx_1, \quad v_3 = 0, \quad (k - \text{тұрақты}).$$

Жылдамдықтың құйын векторының компоненттерін табыңыз.

Жауабы. $\omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = k.$

8. Төмендегі теңдеулер

$$x_1 = \xi_1, \quad x_2 = \xi_2 + \xi_1(e^{-2t} - 1), \quad x_3 = \xi_3 + \xi_1(e^{-3t} - 1)$$

арқылы берілген тұтас орта қозғалысы үшін, деформация жылдамдықтарының тензорының компоненттерін және жылдамдықтың құйын векторының компоненттерін анықтаңыз.

Шешуі. Берілген жағдай үшін орын ауыстыру компоненттері мынаған тең

$$w_1 = 0, \quad w_2 = x_1(e^{-2t} - 1), \quad w_3 = x_1(e^{-3t} - 1),$$

ал $v_i = \frac{\partial w_i}{\partial t}$ формуласы бойынша жылдамдық компоненттері

төмендегідей болады

$$v_1 = 0, \quad v_2 = -2x_1e^{-2t}, \quad v_3 = -3x_1e^{-3t}.$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \text{ формуласы бойынша, деформация}$$

жылдамдықтарының тензорының компоненттері

$$e_{12} = e_{21} = -e^{-2t}, \quad e_{13} = e_{31} = -e^{-3t},$$

$$e_{11} = e_{22} = e_{33} = e_{23} = 0.$$

Жылдамдықтың құйын векторының компоненттері мына

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \text{ сонда}$$

$$\omega_{12} = -\omega_{21} = e^{-2t}, \quad \omega_{13} = -\omega_{31} = \frac{3}{2}e^{-3t},$$

$$\omega_{11} = \omega_{22} = \omega_{33} = \omega_{23} = 0.$$

9. Ортаның айналмалы қозғалысының өрісі үшін

$$\vec{v} = (ax_3 - bx_2)\vec{i} + (bx_1 - cx_3)\vec{j} + (cx_2 - ax_1)\vec{k}$$

құйын сызықтары түзу екендігін дәлелдеңіз және олардың теңдеуін жазыңыз.

Шешуі. Анықтама бойынша жылдамдық құйынының векторы

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{v}, \text{ ал оның компоненттері } \omega_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right),$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right), \quad \omega_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right).$$

Құйын сызықтарының дифференциалдық теңдеулері

$$\frac{dx_i}{\omega_i} = d\lambda, \text{ яғни } bdx_1 = cdx_3, \quad cdx_2 = adx_1,$$

$$adx_3 = bdx_2.$$

Осыларды интегралдап, құйын сызықтарының соңғы түрін табамыз.

$$x_1 = \frac{c}{b}x_3 + k_1, \quad x_2 = \frac{a}{c}x_1 + k_2, \quad x_3 = \frac{b}{a}x_2 + k_3,$$

мұндағы k_1 , k_2 және k_3 - интегралдау тұрақтылары.

10. Лагранж айнымалылары арқылы өрнектелген жылдамдықтар өрісі берілген

$$v_1 = -\xi_2 e^{-t}, \quad v_2 = -\xi_3, \quad v_3 = 2t.$$

Эйлер айнымалылары түріндегі үдеудің компоненттерін табыңыз.

Жауабы. $a_1 = e^{-t}(x_2 + tx_3 - t^3), \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 2.$

11. Тұтас ортаның қозғалыс заңының түрі

$$x_1 = \xi_1, \quad x_2 = \xi_2 + \xi_1(e^{-2kt} - 1), \\ x_3 = \xi_3 + \xi_1(e^{-3kt} - 1).$$

Орын ауыстыру векторының компоненттерін, деформация тензорын және деформация жылдамдығының тензорын анықтаңыз.

Шешуі. Ілеспелі жүйе бастапқы уақыт мезетінде санақ жүйесімен беттесетіндей етіп таңдап алынса, онда орта қозғалысының теңдеуінің түрі

$$x_i = \xi_i + w_i(\xi_k, t).$$

Орын ауыстыру векторының компоненттері

$$w_1 = 0, \quad w_2 = \xi_1 (e^{-2kt} - 1), \quad w_3 = \xi_1 (e^{-3kt} - 1).$$

Декарт координаталар жүйесіндегі деформация және деформация жылдамдығының тензорлары

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial w_j}{\partial \xi_i} \right), \quad e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right).$$

Сонымен, деформация тензорының компоненттері

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial w_1}{\partial \xi_1} = 0, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial w_2}{\partial \xi_2} = 0, \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial w_3}{\partial \xi_3} = 0,$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial w_2}{\partial \xi_1} \right) = e^{-2kt} - 1,$$

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_1}{\partial \xi_3} + \frac{\partial w_3}{\partial \xi_1} \right) = e^{-3kt} - 1,$$

$$\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_2}{\partial \xi_3} + \frac{\partial w_3}{\partial \xi_2} \right) = 0.$$

Лагранж айнмалылары түріндегі жылдамдық векторының

$$v_i = \left(\frac{\partial x_i}{\partial t} \right)_{\xi_k} \text{ компоненттері}$$

$$v_1 = 0, \quad v_2 = -2k\xi_1 e^{-2kt}, \quad v_3 = -3k\xi_1 e^{-3kt},$$

ал Эйлер айнмалылары арқылы

$$v_1 = 0, \quad v_2 = -2kx_1 e^{-2kt}, \quad v_3 = -3kx_1 e^{-3kt}.$$

Бұл жағдайда деформация жылдамдықтары тензорының компоненттерінің түрі

$$e_{11} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = 0, \quad e_{22} = \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0, \quad e_{33} = \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0,$$

$$e_{12} = e_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) = -ke^{-2kt},$$

$$e_{13} = e_{31} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) = -\frac{3}{2} k e^{-3kt},$$

$$e_{23} = e_{32} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) = 0.$$

12. Денемен тіркестірілген ξ_i және кеңістіктегі x_i осьтерімен салыстырғанда тұтас ортаның орын ауыстыру өрістері берілген

$$x_1 = \xi_1, \quad x_2 = \xi_2 + A\xi_3, \quad x_3 = \xi_3 + A\xi_2, \\ (A = \text{const}).$$

Орын ауыстыру векторының компоненттері мен деформациялар тензорын анықтаңыз.

Жауабы. $w_1 = 0, \quad w_2 = A\xi_3, \quad w_3 = A\xi_2;$
 $\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = A, \quad \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon_{12} = \varepsilon_{13} = 0.$

13. Тұтас ортаның қозғалыс заңы

$$x_1 = \xi_1, \quad x_2 = (\xi_1 + \xi_2)e^t, \quad x_3 = (\xi_1 - \xi_3)e^{-t}.$$

Деформация жылдамдықтарының тензорының компоненттерін анықтаңыз.

Жауабы. $e_{22} = 1, \quad e_{33} = -1, \quad e_{11} = e_{12} = e_{13} = e_{23} = 0.$

14. Жылдамдықтар өрісі төмендегідей түрде берілген:

$$v_1 = a_1(t)x_1, \quad v_2 = a_2(t)x_2, \quad v_3 = a_3(t)x_3.$$

Деформация жылдамдықтарының тензорының компоненттерін анықтаңыз.

Жауабы. $e_{11} = a_1(t), \quad e_{22} = a_2(t), \quad e_{33} = a_3(t),$
 $e_{ij} = 0 \quad (i \neq j).$

15. Сызықтық деформация төмендегідей арақатынастармен берілген

$$\begin{aligned} w_1 &= 4x_1 - x_2 + 3x_3, & w_2 &= x_1 + 7x_2, \\ w_3 &= -3x_1 + 4x_2 + 4x_3. \end{aligned}$$

Деформациялар тензорының компоненттерін анықтаңыз.

Жауабы. $\varepsilon_{11} = 4, \quad \varepsilon_{22} = 7, \quad \varepsilon_{33} = 4, \quad \varepsilon_{23} = 2, \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{13} = 0.$

16. Белгілі бір ағынның жылдамдықтар өрісі берілген:

$$v_1 = 0, \quad v_2 = a(x_1 x_2 - x_3^2) e^{-bt}, \quad v_3 = a(x_2^2 - x_1 x_3) e^{-bt},$$

мұндағы a, b – тұрақтылар. $t=0$ уақыт мезетінде, $P(1,0,3)$ нүктесіндегі деформация жылдамдықтарының тензорының компоненттерін анықтаңыз.

Жауабы. $e_{22} = a, \quad e_{33} = -a, \quad e_{13} = -\frac{3a}{2}, \quad e_{23} = -3a,$
 $e_{11} = \varepsilon_{12} = 0.$

17. Орта бөлшектерінің орын ауыстыру векторының өрісі берілген

$$\vec{w} = (x_1 - x_3)^2 \vec{i} + (x_2 + x_3)^2 \vec{j} - x_1 x_2 \vec{k},$$

деформация тензорының компоненттерін анықтаңыз.

Жауабы. $\varepsilon_{11} = 2(x_1 - x_3), \quad \varepsilon_{22} = 2(x_2 + x_3),$

$$\varepsilon_{13} = x_3 - x_1 - \frac{x_2}{2}, \quad \varepsilon_{23} = x_2 + x_3 - \frac{x_1}{2}, \quad \varepsilon_{33} = \varepsilon_{12} = 0.$$